

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТАНДЕРОВ И ЭЖЕКТОРОВ

3.1. Основные уравнения моделей одноступенчатых турбодетандеров и их решение

Для успешного решения нелинейных задач оптимизации технологических схем и режимов работы КС необходимы алгоритмы и программы моделирования турбодетандеров (ТД), позволяющие осуществить проектирование машин с оптимальными характеристиками в расчетных режимах, а также определить характеристики работы ТД в нерасчетных режимах. Приемлемые результаты можно получить, используя метод подобия при проектировании турбомашин и метод оценки параметров математических моделей при расчете режимов.

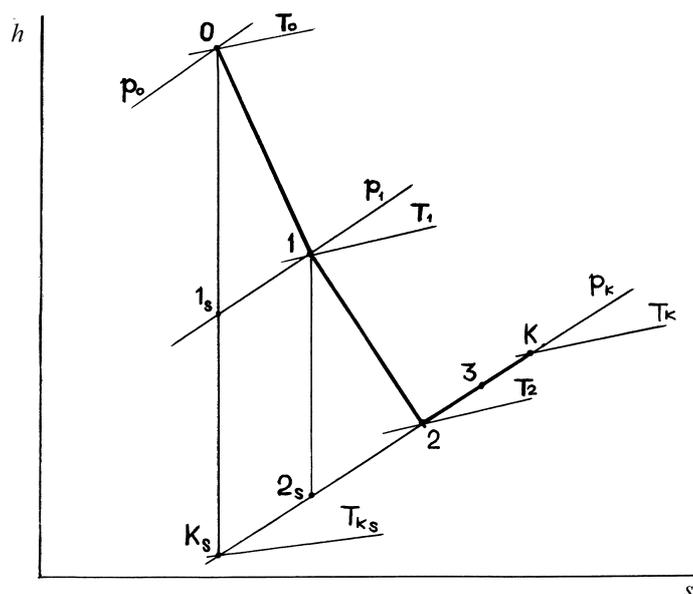


Рис.3.1. Изображение процесса расширения в одноступенчатом турбодетандере в h-s диаграмме

Для математического описания ТД необходимо определить параметры газа на выходе из соплового аппарата (СА) (точка 1, рис. 3.1) и рабочего колеса (РК) (точка 2). Модель одноступенчатого ТД [30] базируется на системе трех нелинейных уравнений вида:

$$\rho_T - f_1(p_1, \rho_1, h_2, a) = 0;$$

$$\eta_g - f_2(p_1, \rho_1, h_2, \mathbf{a}) = 0; \quad (3.1)$$

$$G(p_1) - G(p_1, \rho_1, h_2, \mathbf{a}) - G_u = 0,$$

где \mathbf{a} - вектор режимных параметров; ρ_T - степень реактивности, $\rho_T = (h_1 - h_{2s})/h_s$; η_g - гидравлический КПД, $\eta_g = (h_0 - h_{2s})/h_s$; индекс u - утечки.

В этой модели первые два уравнения определяют с помощью одномерной газовой динамики степень реактивности и гидравлический КПД, а третье уравнение означает равенство массовых расходов газа на выходе из СА и входе в РК.

Модель ТД [64] основана на приближенном методе термогазодинамического расчета с использованием газодинамических функций и заменой реального газа идеализированным. Недостатком первой модели является необходимость решения системы нелинейных уравнений, а второй - относительно большое число режимных параметров и применение газодинамических функций.

Реализована также подпрограмма расчета ожидаемого значения КПД и некоторых конструктивных и термодинамических параметров [72]. Для нее необходимо предварительное задание температуры и давления на выходе из ТД, давления на входе, расхода газа, максимальной частоты вращения ротора и минимального диаметра РК. В результате вычисляются значения ожидаемого КПД, коэффициента быстроходности, диаметра РК, частоты вращения ротора, КПД при коэффициенте быстроходности $s_n = 70$.

Расчеты с помощью модернизированной второй модели режимов работы ТД двух ступеней установки КГУ-500/4,5 позволили установить вид функциональных зависимостей, связывающих скоростной коэффициент РК ψ и угол входа потока в РК β_1 с безразмерной окружной скоростью $x_0 = u/c_s$ (рис.3.2, 3.3). С использованием соответствующих зависимостей, представленных в виде степенных функций, разработана модель ТД, отличающаяся достаточно высоким быстродействием и хорошим приближением к реальной картине процессов расширения. В ней состояние газа при

течении в СА определяется на основе модели изоэнтروпийного течения реального газа с одинаковой величиной перепада давления.

Параметры изоэнтропийного течения реального газа определяются решением системы двух уравнений: $h_1 + c_1^2/2 = const$; $s = const$. При известной функциональной зависимости $t_{1s}=t(t_0, p_1/p_0)$ на изоэнтропе эта система сводится к одному уравнению энергии относительно p_1

$$h(p_1, s_0) - h_{1s} = 0, \tag{3.2}$$

где $h_{1s}=h_0 - c_1^2/(2\phi^2)$; ϕ - скоростной коэффициент всего СА; c - абсолютная скорость; индексы: 0 - вход в ТД; 1 - выход из СА; s - изоэнтропийный процесс.

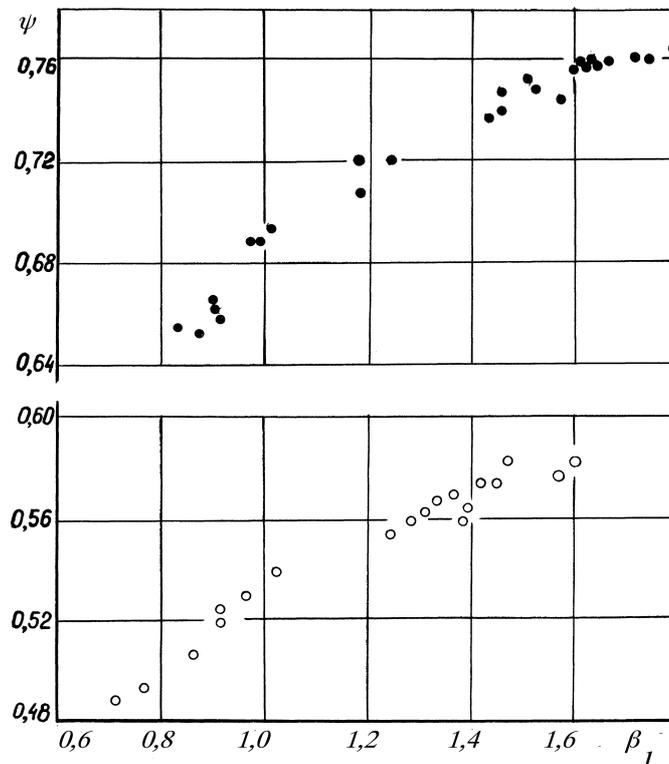


Рис.3.2. Зависимость скоростного коэффициента рабочего колеса от угла β_1 для турбодетандеров: o - I ступени, ● - II ступени

Тогда температура газа на выходе из СА определяется как $T_1 = T(h_1, p_1)$, либо по приближенной зависимости

$$T_1 \approx T_0 - [T_0 - T(p_1, s_0)] \phi^2, \tag{3.3}$$

где $h_1 = h_0 - c_1^2/\phi$.

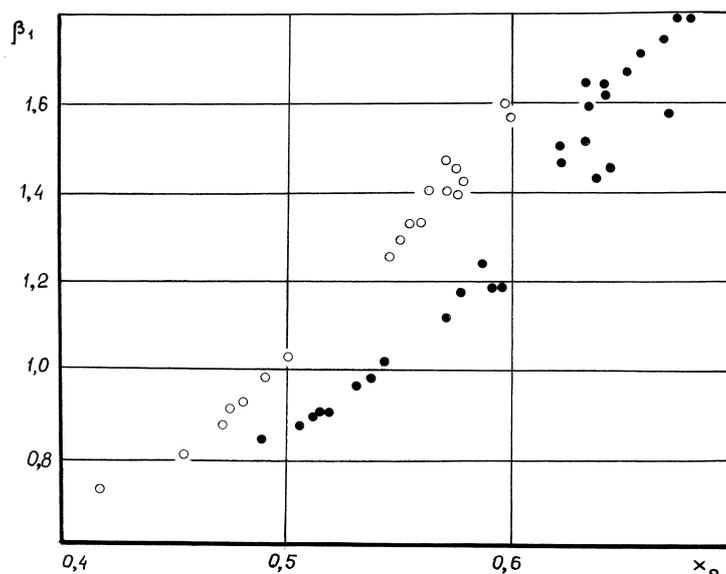


Рис.3.3. Зависимость угла относительного потока на входе в рабочее колесо β_1 от коэффициента окружной скорости x_0 для турбодетандеров:
o - I ступени, • - II ступени

Уравнение массового расхода газа через ТД, записанное для выходного сечения СА, имеет вид

$$G_1 = f_1 \rho_1 c_1 \sin \alpha_1, \quad (3.4)$$

где f_1 - площадь поперечного сечения входа в РК; ρ_1 - плотность газа на входе в РК; c_1 - абсолютная скорость потока газа на входе в РК.

При определенных входных параметрах в ТД возможен сверхкритический режим течения ($c_1 > a_1$, $a_1 = a(p_1, T_1)$ - скорость звука) вследствие расширения газа в косом срезе СА. В этом случае необходимо уточнить значения параметров на выходе из СА ($p_1, T_1, h_1, c_1, \alpha_1$), что можно сделать решением уравнения неразрывности

$$G_c - G(p_1, T_1) = 0, \quad (3.5)$$

где G_c - расход, определяемый для условий узкого сечения СА. Здесь расход G_c является наибольшим, который может пройти через сверхзвуковое сопло.

При течении с трением скорость потока в узком сечении сопла не достигает местной скорости звука ($c_c < a_c$). Тогда параметры газа в этом сечении можно найти решением уравнения энергии, записанного в виде

$$h(p_c, T_c) + c_c^2/2 - h_0 = 0, \quad (3.6)$$

где $c_c = a(p_c, s_0)\varphi_c$; $T_c = T_0 - [T_0 - T(p_c, s_0)]\varphi_c^2$; φ_c - скоростной коэффициент сужающейся части СА.

Следует отметить, что скоростные коэффициенты СА обычно принимают постоянными, не зависящими от режима работы. К лучшим результатам приводит применение функциональных зависимостей вида $\varphi(u_1/c_s)$ и $\varphi(a_{cs}/c_s)$. Тогда расход в узком сечении СА

$$G_c = c_c \rho_c f_c \quad (3.7)$$

Одновременно с решением уравнения (3.5) корректируются температура газа на выходе из СА по формуле (3.3) и угол α_1 , изменившийся вследствие отклонения потока в косом срезе,

$$\alpha_1 = -\arctg[\sin(\beta_1 - \alpha_1)/\cos(\beta_1 - \alpha_1)], \quad (3.8)$$

где $\sin(\beta_1 - \alpha_1) = u_1 \sin \beta_1/c_1$.

Таким образом, определение параметров газа на выходе из СА сводится к решению одного нелинейного уравнения (3.2) при докритическом режиме течения и последовательному решению уравнений (3.2), (3.6), (3.5) при сверхкритическом. Эти уравнения, записанные в виде $x = f(x)$, решаются методом Вегстейна за 3-6 итераций при относительной погрешности нахождения корня 10^{-5} .

Для получения уравнений, определяющих состояние газа на выходе из РК и диффузора (точка 3, рис.3.1), воспользуемся формулой гидравлического КПД турбодетандера

$$\begin{aligned} \eta_g &= (h_0 - h_3)/(h_0 - h_{ks}) = \\ &= (u_1 c_1 \cos \alpha_1 + u_2 c_2 \cos \alpha_2)/(h_0 - h_{ks}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Проведя преобразования и учитывая, что $c_2 \cos \alpha_2 = w_2 \cos \beta_2 - u_2$ (рис.3.4), получим выражение для энтальпии газа на выходе из диффузора

$$h_3 = h_0 - u_1 c_1 \cos \alpha_1 + u_2^2 - u_2 w_2 \cos \beta_2. \quad (3.10)$$

Тогда для энтальпии газа на выходе из РК можно записать

$$\begin{aligned} h_2 &= h_3 - c_2^2/2 = \\ &= h_0 - u_1 c_1 \cos \alpha_1 + u_2 - u_2 w_2 \cos \beta_2 - c_2^2/2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $c_2^2/2$ - потери с выходной скоростью.

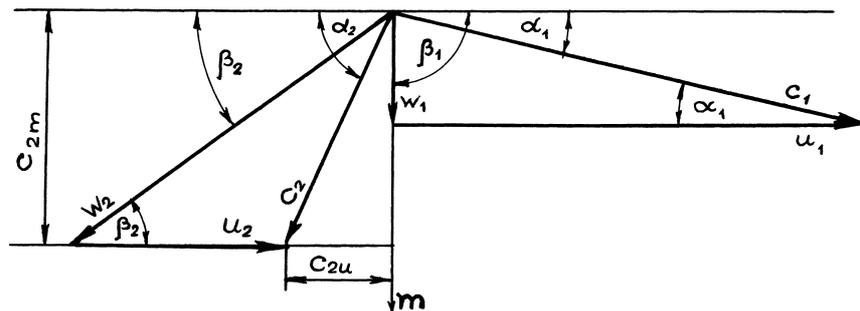


Рис.3.4. Треугольники скоростей в турбодетандере

Подставляя в уравнение (3.11) зависимости, полученные из треугольников скоростей (рис.3.4), а также связь относительной скорости w_2 и скоростного коэффициента ψ

$$\begin{aligned} c_{2u} &= w_2 \cos \beta_2 - u_2; \\ c_{2m} &= (u_2 + c_2) \operatorname{tg} \beta_2 = w_2 \sin \beta_2; \\ c_2^2 &= c_{2u}^2 + c_{2m}^2 = w_2^2 - 2w_2 u_2 \cos \beta_2 + u_2^2; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$w_2^2/2 = \psi^2(h_2 - h_{2s})/(1 - \psi^2),$$

окончательно получим выражение для энтальпии в точке 2,

$$h_2 = \psi^2 h_{2s} + (1 - \psi^2) (h_0 - u_1 c_1 \cos \alpha_1 + u_2^2/2). \quad (3.13)$$

Из выражений (3.12) могут быть определены w_2 , c_{2m} , c_2 , а затем h_3 и гидравлический КПД.

Изоэнтروпийный КПД рассчитывается по формуле

$$\eta_s = \eta_g - \Delta h_d - \Delta h_u, \quad (3.14)$$

где потери холода от трения дисков Δh_d и вследствие перетекания газа через зазор между колесом и корпусом Δh_u определяются по методикам, приведенным в [18]:

$$\Delta h_d = 10^{-6} K u_1^3 d_1^2 \rho_1 [G_1(h_0 - h_{ks})]; \quad (3.15)$$

$$\Delta h_u = \alpha h_g, \quad (3.16)$$

где $K = 37/\text{Re}^{0,2}$.

Таким образом, уравнения (3.2)- (3.16), дополненные термодинамическими функциями реального газа $\rho(p, T)$, $h(p, T)$, $T(s, p)$, $T(h, p)$ позволяют достаточно строго решить поставленную задачу.

Для подобных ТД с постоянными комплексами $c_1 = b_1/d_1$; $c_2 = b_c/d_1$; $c_3 = h_c/d_1$; $c_4 = d_{2c}/d_1$ геометрические характеристики машины можно определить по диаметрам РК. Это позволяет применить описанный алгоритм для моделирования квазистационарных режимов работы КС с ТД, для которых имеются исследованные прототипы. Здесь b_1 - ширина РК на входе; b_c , h_c - ширина и высота сопла соответственно; d_{2c} - средний диаметр на выходе из РК.

Качество аналитического описания ТД приведенными уравнениями и зависимостями иллюстрирует рис.3.5, показывающий максимумы изоэнтروпийного КПД в области $x_0 \approx 0,68$ (1-я ступень) и $x_0 \approx 0,71$ (2-я ступень).

Опытные данные работы [13] (рис.3.6) показывают, что количественную оценку влияния масштабного фактора на изоэнтропийный КПД геометрически подобных радиальных ТД целесообразно учесть в виде,

$$\eta_s/\eta_{s p} = (d_1/d_{1 p})^n, \quad (3.17)$$

где $d_{1 p}$, $\eta_{s p}$ - соответственно наружный диаметр РК и изоэнтропийный КПД прототипа; $n \approx 0,2$.

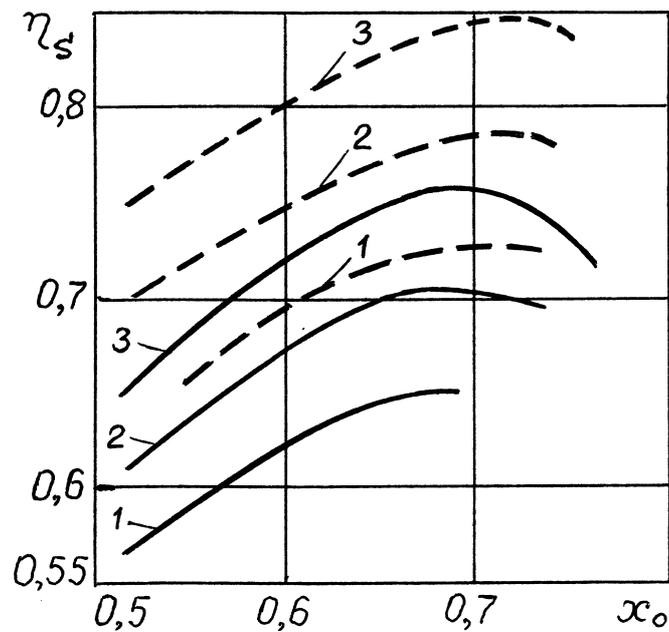


Рис.3.5. Зависимости η_s турбодетандеров 1-й (—) и 2-й (- -) ступеней от параметра x_0 при диаметрах d_1 , мм: 1 - 28; 2 - 20; 3 - 14

Диаметр РК d_1 проектируемого ТД можно найти по условиям его работы - массовому расходу G , давлению p_0 и температуре T_0 на входе в ТД и давлению p_2 на выходе. Аналогично работе [13] выражение, определяющее массовый расход при условиях на выходе из РК турбодетандера, записано в виде

$$G = c_{2m} \rho_2 \pi d_2^2 / 4, \quad (3.18)$$

где c_{2m} - меридиональная составляющая абсолютной скорости; d_2 - максимальный диаметр РК на выходе из ТД.

Меридиональную скорость c_{2m} можно представить через радиальную составляющую абсолютной скорости на входе в РК c_{1m} , выразив последнюю с помощью соответствующих характеристик ТД.

Уравнение энергии для СА представим в виде выражения, связывающего изоэнтروпийный теплоперепад h_s в ТД со скоростным коэффициентом СА ϕ , степенью реактивности ρ_T и действительной скоростью истечения из СА c_1

$$h_s = c_1^2 / [2 \phi^2 (1 - \rho_T)]. \quad (3.19)$$

Здесь $c_1 = c_{1m} / \sin \alpha_1$; α_1 - угол выхода потока из сопла.

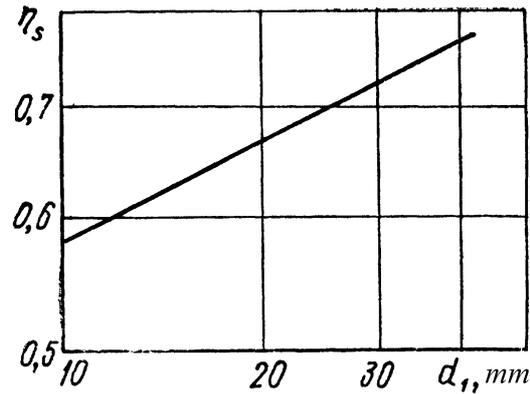


Рис.3.6. Зависимость η_s от d_1 в режимах с максим. КПД по данным работы [13]

Подставляя выражение (3.19) в уравнение (3.18) и выполняя преобразования, получаем

$$d_1 = A \rho_2^{-1/2}, \quad (3.20)$$

где

$$A = 2/k_1 \{ G/[\pi k_0 \varphi \sin \alpha_1 \sqrt{2h_s(1 - \rho_T)}] \}^{1/2};$$

$$\rho_2 = \rho_2(p_2, T_2); \quad k_1 = d_2/d_1; \quad k_0 = c_{2m}/c_{1m}.$$

Выразив в явном виде d_1 из формулы (3.17) и приравняв к выражению (3.20), получим уравнение относительно неизвестной температуры на выходе из ТД:

$$A \rho_2^{-1/2} - d_{1p} [(h_0 - h_2) / (h_s \eta_{sp})]^{1/n} = 0, \quad (3.21)$$

где h_0, h_2 - энтальпии на входе и выходе из ТД соответственно.

В результате решения уравнения (3.21) определяются соответствующие заданным условиям работы диаметр колеса и изоэнтропийный КПД. Достоинствами описанного подхода является использование уравнений состояния реального газа, совпадение температуры T_2 при определении диаметра d_1 и КПД η_s , относительно небольшое число геометрических и режимных параметров модели.

Турбодетандеры ДТГ-0,15/2,5 1-й и 2-й ступеней расширения установки КГУ-500/4,5, для которых имелись достаточно подробные экспериментальные данные, выбраны в качестве прототипов ТД при

определении параметров, приведенных ниже. Параметры определены в режимах, соответствующих максимальным значениям изоэнтروпийных КПД, из условия равенства расчетных и опытных значений η_s .

	ТД 1-й ступени	ТД 2-й ступени
Наружный диаметр РК прототипа d_{1p} , мм	20	20
Отношение максимального диаметра РК на выходе к наружному диаметру k_1	0,575	0,68
Угол выхода потока из СА α_1 , рад	0,287	0,3
Скоростной коэффициент СА φ	0,872	0,97
Степень реактивности ρ_T	0,509	0,401
Отношение меридиональных составляющих абсолютных скоростей на выходе в РК k_0	0,502	0,606
Изоэнтروпийный КПД прототипа η_{sp}	0,707	0,78
Безразмерная окружная скорость x_0	0,68	0,7

На рис.3.7 показаны расчетные зависимости наружного диаметра РК и частоты вращения ротора от расхода гелия при типичных для КГУ условиях работы: $p_0 = 2,25$ МПа, $T_0 = 50$ К, $p_2 = 1,01$ МПа (1-я ступень); $p_0 = 0,89$ МПа, $T_0 = 18,5$ К, $p_2 = 0,134$ МПа (2-я ступень).

3.2. Определение параметров моделей одноступенчатых турбодетандеров

Математические модели ТД содержат параметры, непосредственное определение которых из экспериментов вследствие малых размеров высокооборотных турбин практически невозможно. Поэтому задачу определения величин этих параметров целесообразно сформулировать как задачу оценки параметров нелинейных уравнений.

Модели турбодетандеров, описанные выше, представлены в виде операторного уравнения $\mathbf{B} = \Phi(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{a})$. В рассматриваемой задаче значение вектора режимных параметров \mathbf{a} неизвестно, значения входных \mathbf{A} и выходных \mathbf{B} параметров известны. Задача заключается в нахождении оценки \mathbf{a}^* для вектора \mathbf{a} по наблюдаемым значениям \mathbf{A} и

В. Оценки неизвестных параметров могут быть найдены путем минимизации квадратичного функционала

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^n \zeta_r [B_{ri} - \hat{B}_{ri}(\mathbf{A}, \mathbf{a})]^2 \sigma_i^{-2}, \quad (3.22)$$

где k - число типов наблюдений; n - число наблюдений; ζ_r - весовые коэффициенты; σ_i^{-2} - дисперсии наблюдений.

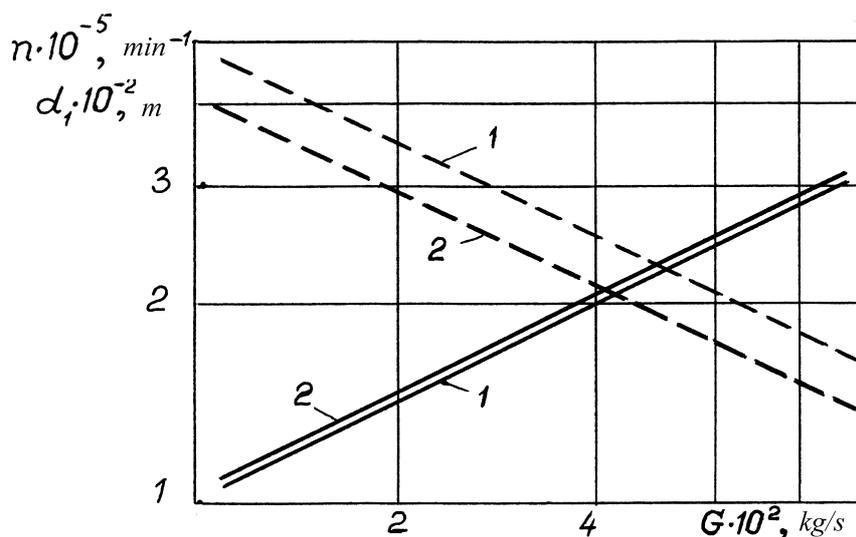


Рис.3.7. Зависимости диаметра d_1 (—) и частоты вращения ротора (_ _ _) от расхода гелия для 1-й (1) и 2-й (2) ступеней

Используя численные методы поиска экстремума, можно найти минимум $F(\mathbf{a})$. Найденный таким образом вектор \mathbf{a}^* является оценкой точных значений \mathbf{a} .

Для решения поставленной задачи использованы опытные данные [31], полученные при испытаниях турбодетандеров ДТГ-0,15/2,5, комплектующих установки КГУ-500/4,5. Условия работы установки (ожижительный и рефрижераторный режимы) привели к существенным изменениям входных и выходных параметров первой ($p_0 = 1,83 - 2,27$ МПа; $T_0 = 47,2 - 66,8$ К; $\varepsilon = 0,39 - 0,46$) и второй ($p_0 = 0,70 - 0,98$ МПа; $T_0 = 14,7 - 19,8$ К; $\varepsilon = 0,14 - 0,20$) ступеней расширения. Параметры модели (3.2) - (3.16) определены минимизацией функционала

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (G_i - \hat{G}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (T_i - \hat{T}_i)^2, \quad (3.23)$$

где принималось $\zeta_1 = 62500$; $\zeta_2 = 1$.

В такой модели ТД вектор $\mathbf{a} = (\psi, \beta_1, \varphi, \varphi_c, \alpha)$. Здесь ψ - скоростной коэффициент РК; β_1 - угол относительной скорости на входе потока в РК; φ - скоростной коэффициент всего СА; φ_c - скоростной коэффициент сужающейся части СА; α - коэффициент потерь от перетечек газа в зазоре между колесом и корпусом.

Перечисленные параметры являются переменными, зависящими от режимов работы ТД. Нахождение соответствующих этим параметрам функциональных зависимостей представляет самостоятельную задачу, решение которой определяет адекватность модели реальному техническому устройству.

Как показано выше (рис.3.2, 3.3), функциональные зависимости для β_1 и ψ можно представить в виде

$$\beta_1 = a_1 x_0^{a_2}; \quad (3.24)$$

$$\psi = a_3 \beta_1^{a_4} + a_5 \quad (3.25)$$

Аналогично для φ запишем

$$\varphi = a_6 x_0^{a_7} \quad (3.26)$$

Учитывая, что $a_8 = \alpha$, число неизвестных параметров в модели ТД при докритическом режиме течения составит $N = 8$.

В результате минимизации функционала (3.23) симплексным поиском Нелдера и Мида значение $F(\mathbf{a})$ в точке минимума при $n = 19$ составило 3,628.

При оценке параметров модели следует учитывать, что в ТД 1-й ступени режим течения докритический, а во 2-й - сверхкритический. В последнем случае массовый расход газа через ТД определяется в узком сечении сопла с использованием зависимости коэффициента потерь от отношения скорости в узком сечении к условной изоэнтропийной, установленной при вычислительном эксперименте,

$$\varphi_c = a_9 (c_c/c_s)^{a_{10}} + a_{11}. \quad (3.27)$$

Таким образом, при сверхкритическом режиме течения число параметров в модели ТД увеличивается на 3.

В результате минимизации функционала (3.23) симплексным поиском Нелдера и Мида значение $F(\mathbf{a})$ в точке минимума при $n = 28$ (2-я ступень) составило 16,591.

При замене выражения (3.25) на

$$\psi = a_3(w_1/c_s)^{a_4} + a_5 \quad (3.28)$$

результаты моделирования существенно лучше совпадают с экспериментальными.

Получены следующие значения параметров модели ТД 1й ступени в диапазоне переменных $x_0 = 0,418 - 0,598$ и $w_1/c_s = 0,178 - 0,264$:

$$a_1 = 4,3108; a_2 = 2,0000; a_3 = 0,3608; a_4 = -0,2160; a_5 = 0,00425; \\ a_6 = 0,8703; a_7 = -0,008062; a_8 = 0,0004459; F(\mathbf{a}) = 3,51.$$

Для ТД 2-й ступени в диапазоне переменных $x_0 = 0,4874 - 0,6775$;

$w_1/c_s = 0,227 - 0,334$; $c_c/c_s = 0,692 - 0,735$ получено: $a_1 = 2,9940$;

$a_2 = 2,0000$; $a_3 = 0,3833$; $a_4 = -0,2395$; $a_5 = -0,02758$; $a_6 = 0,9700$;

$a_7 = 0$; $a_8 = 0,0397$; $a_9 = 0,9975$; $a_{10} = -0,00764$; $F(\mathbf{a}) = 2,608$. При этих значениях параметров расчетные величины расходов газа и конечных температур достаточно близки к экспериментальным во всех режимах.

Анализ этих результатов показывает, что для ТД 2-й ступени a_7 , $a_{11} \approx 0$ и φ , $\varphi_c \approx const$. Тогда число параметров моделей при дозвуковых и сверхзвуковых режимах $m = 7$. Поскольку значения параметров a_2 , a_3 , a_4 для обеих ступеней примерно одинаковы, можно полагать, что полученные зависимости $\beta_I(x_0)$ и $\psi(w_1/c_s)$ имеют универсальный характер. Это позволит использовать их с небольшой погрешностью для моделирования аналогичных в конструктивном отношении ТД, отличающихся геометрическими характеристиками.

Помимо вектора параметров \mathbf{a} для моделирования ТД необходимо задать геометрические характеристики РК и СА, значения которых для исследованных турбин приведены ниже.

Приведенная схема определения скоростных коэффициентов СА и РК в нерасчетных режимах работы ТД обеспечивает высокое качество приближения к экспериментальным значениям изоэнтропийных КПД и расходов газа.

	1-я ступень	2-я ступень
Угол абсолютной скорости выхода потока из СА α , рад	0,286896	0,286896
Сечение на выходе из СА f_1 , м	$3,77 \times 10^{-5}$	$4,212 \times 10^{-5}$
Площадь узкого сечения сопла f_c , м	$9,67 \times 10^{-6}$	$1,153 \times 10^{-5}$
Наружный диаметр РК d_1 , мм	20,0	20,0
Диаметр втулки РК d , мм	3,8	4,0
Диаметр воронки РК d , мм	11,5	13,6
Угол относительной скорости выхода потока из РК β_2 , рад	0,488691	0,409203

Достоинствами алгоритма являются достаточно строгий учет физических закономерностей процесса расширения и относительно небольшое число режимных параметров, необходимых для моделирования одноступенчатых гелиевых ТД.

3.3. Оценка влияния режимных параметров на характеристики гелиевых турбодетандеров

Для моделирования динамики КС необходимы программные модули ТД, позволяющие определить значения температуры и расхода газа на выходе из машины при изменении условий ее работы с максимально возможной скоростью вычислений.

Уравнение расхода газа через ТД обычно получают из уравнения сохранения энергии в СА и уравнения политропы в виде функции

$$G = f(p_0, T_0, R, k, m, \varepsilon),$$

где p_0 , T_0 - начальные давление и температура; R - газовая постоянная; k , m - показатели адиабаты и политропы; ε - степень расширения.

Расчет КПД выполняют по уравнениям, учитывающим основные виды потерь [18]. Их недостатком является необходимость предварительного нахождения таких величин, как степень реактивности, скоростные коэффициенты и др., что является достаточно сложной самостоятельной задачей. Поэтому упрощенную модель ТД целесообразно представить в виде эмпирических уравнений, коэффициенты которых можно определить из статических характеристик машины, найденных экспериментально. Достоинством такого подхода является высокая скорость расчета основных характеристик машины, недостатком - привязка уравнений к конкретному типу ТД.

Используя традиционную форму уравнения, определяющего зависимую переменную в функции известных величин, получим

$$y = a_0 \prod_{i=1}^m x_i^{a_i} \quad (3.29)$$

При соответствующем выборе аргументов уравнение (3.19) можно использовать для расчета расхода газа и КПД в широком диапазоне изменения режимных параметров ТД.

Поскольку непосредственно из экспериментов известны величины входных и выходных температур и давлений (T_0, p_0, T_k, p_k), в качестве независимых переменных уравнения (3.29) целесообразно использовать эти величины либо их сочетания. В условиях экспериментов, описанных выше, при изменении коэффициента окружной скорости x_0 в пределах 0,4-0,7 значения КПД соответствовали восходящей ветви характеристики $\eta(x_0)$.

Были использованы следующие аппроксимирующие уравнения:

$$G, \eta = a_0 \varepsilon^a (p_0 / \sqrt{T_0})^{a_2}; \quad (3.30)$$

$$G, \eta = a_0 \varepsilon^a (\sqrt{1 - \varepsilon^2} p_0 / \sqrt{T_0})^{a_2}; \quad (3.31)$$

$$G, \eta = a_0 \varepsilon^a (\sqrt{1 - \varepsilon^2} p_0 / \sqrt{T_0})^{a_2} T_0^{a_3}; \quad (3.32)$$

$$G, \eta = a_0 p_k^a p_0^{a_2} T_0^{a_3}, \quad (3.33)$$

где p , бар; T , К.

Приближенные индивидуальные доверительные интервалы для коэффициентов a могут быть вычислены линеаризацией нелинейной модели в пространстве параметров вблизи оценки a^* , полученной методом наименьших квадратов, разложением в ряд Тейлора и отбрасыванием членов второго и более высоких порядков.

100(1 - α)% - ные индивидуальные доверительные интервалы для линеаризованной модели имеют вид [62]:

$$a_i - t_{1-\alpha/2} s_{yi} \sqrt{I_{ii}} \leq a_i^* < a_i + t_{1-\alpha/2} s_{yi} \sqrt{I_{ii}},$$

где I_{ii} - диагональные элементы матрицы $I = (X^T X)^{-1}$; s_{yi} - оценка стандартной ошибки; t - безразмерная t -статистика Стьюдента; α - уровень значимости.

В случае, если повторные измерения не проводятся, в качестве оценки s используется величина $s_r = \sqrt{s/(n - m)}$.

Коэффициенты уравнений, их индивидуальные доверительные интервалы, значения суммы квадратов отклонений $S = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$, среднего относительного отклонения $M = 1/n \sum |(y_i - \hat{y}_i)/y_i|$ и максимального относительного отклонения $M_{max} = \max |(y_i - \hat{y}_i)/y_i|$ приведены в табл.3.1, 3.2.

Поскольку в уравнении (3.33) $a_2 \approx 1$, $a_3 \approx -0,5$ (табл.3.2), для расхода газа через ТД 1-й ступени можно записать

$$G = a_0 p_k^{a_1} p_0 T_0^{-1/2}. \quad (3.34)$$

Аналогично для КПД $a_1 \approx 1$, $a_3 \approx -0,5$ (табл.3.2)

$$\eta = a_0 p_k^{a_1} p_0 T_0^{-1/2}. \quad (3.35)$$

Для ТД 2-й ступени из уравнения (3.32) при $a_1 \approx -1$, $a_2 \approx -1$, $a_3 \approx -0,5$ следует

$$\eta = a_0 / (p_k \sqrt{1 - \varepsilon^2}) = a_0 p_0 / p_k \sqrt{p_0^2 - p_k^2}, \quad (3.36)$$

т.е. можно предположить, что при сверхкритическом режиме течения КПД зависит только от начального и конечного давлений.

Таблица 3.1

Статистические характеристики

	Уравнение	1-я			2-я		
		$s \times 10^6$	$M, \%$	$M_{max}, \%$	$s \times 10^6$	$M, \%$	$M_{max}, \%$
		1-я			2-я		
		ступень			ступень		
G	3.30	1,1457	0,56	1,45	25,742	2,36	5,34
	3.31	1,1291	0,55	1,44	25,795	2,36	5,36
	3.32	1,1260	0,57	1,43	9,6977	1,34	3,48
	3.33	1,1436	0,57	1,43	9,9176	1,34	3,49
	3.34	1,3508	0,60	1,71	-	-	-
η_s	3.30	10442	3,15	6,79	14686	2,61	9,95
	3.31	10448	3,16	6,78	14683	2,61	9,95
	3.32	10148	3,18	6,48	11202	2,30	7,86
	3.33	10056	3,18	6,66	11200	2,30	7,86
	3.35	16751	3,95	7,56	-	-	-
	3.36	-	-	-	15557	2,71	8,36
η_T	3.30	10590	3,14	7,06	14419	2,44	9,60
	3.31	10599	3,16	7,04	14420	2,44	9,60
	3.32	10063	3,19	6,65	9142	1,95	7,55
	3.33	10056	3,18	6,66	9138	1,95	7,55
	3.35	14268	3,79	7,92	-	-	-
	3.36	-	-	-	11658	2,22	8,77

Здесь η_s - изоэнтропийный КПД, η_T - температурный КПД,

Нестационарный процесс в ТД определяется гидродинамикой проточной части. Из-за высоких скоростей газа время прохождения потока через машину очень мало и несоизмеримо со временем нестационарных процессов в установке. Поэтому, в достаточно близком приближении, можно полагать, что ТД представляет собой безинерционный модуль.

В табл. 3.3 сопоставлены подпрограммы моделирования ТД, основанные на: 1 - решении системы одномерных стационарных уравнений газовой динамики [30]; 2 - решении уравнения для скорости на выходе из СА с использованием газодинамических функций [64]; 3 - модернизированном варианте предыдущей

подпрограммы; 4 - модели, описанной в настоящей работе; 5 - расчете расхода и КПД по аппроксимирующим уравнениям.

Таблица 3.2

Параметры уравнений и их доверительные интервалы

Уравнение		a_0	a_1	a_2	a_3
1-я ступень					
G	3.33	0,01159 $\pm 0,01053$	-0,1225 $\pm 0,0570$	1,0889 $\pm 0,0850$	-0,4719 $\pm 0,0369$
	3.34	0,01118 $\pm 0,00071$	-0,1770 $\pm 0,0617$	-	-
η_s	3.33	0,4552 $\pm 0,0043$	-0,5774 $\pm 0,0015$	1,0708 $\pm 0,0021$	-0,4189 $\pm 0,0009$
	3.34	0,1007 $\pm 0,0920$	-0,9310 $\pm 0,4580$	-	-
η_T	3.33	0,5595 $\pm 0,0045$	-0,6384 $\pm 0,0015$	1,0999 $\pm 0,0022$	-0,4613 $\pm 0,0010$
	3.34	0,09836 $\pm 0,08939$	-0,9482 $\pm 0,4477$	-	-
2-я ступень					
G	3.33	0,03812 $\pm 0,00809$	-1,2945 $\pm 0,3106$	0,7693 $\pm 0,0852$	-0,4430 $\pm 0,0879$
	η_s	3.33	0,7328 $\pm 0,0081$	-1,2817 $\pm 0,0145$	0,03613 $\pm 0,00405$
3.36		0,9851	-	-	-
η_T	3.33	0,9694 $\pm 0,0078$	-1,0361 $\pm 0,0130$	0,05738 $\pm 0,00364$	-0,0118 $\pm 0,0039$
	3.36	1,0298 $\pm 0,0108$	-	-	-

3.4. Моделирование жидкостных детандеров и криогенных нагнетателей

Поршневой жидкостной детандер

Для расчета СО КГУ в программах оптимизации технологических схем и моделирования КРР необходим программный модуль поршневого жидкостного детандера, позволяющий определить

параметры криоагента на выходе из машины в различных условиях ее работы.

Таблица 3.3

Сопоставление подпрограмм моделирования ТД

Модель	$F(a)$	n_1	n_2	$F(a)$	n_1	n_2
1	9,515	8	14	24,025	8	14
2	4,180	17	7	3,539	17	7
3	3,175	17	7	3,577	17	7
4	3,513	8	7	2,609	11	7
5	2,681	8	-	1,947	8	-

Здесь n_1 - число режимных параметров; n_2 - число геометрических параметров.

При расширении криоагента вблизи двухфазной области в зависимости от степени расширения, начальных давления p_n , температуры T_n и изоэнтропийного КПД η_s возможен ряд вариантов течения процесса, отличающихся положением точек конца изоэнтропийного расширения p_k , T_{ks} и параметрами газа на выходе из детандера p_k , T_k в фазовой диаграмме. В их числе: T_{ks} - в области жидкости, T_k - в области жидкости либо в двухфазной области; T_{ks} - в двухфазной области, T_k - в двухфазной либо в газовой области; T_{ks} и T_k - в газовой области.

В модуле предусмотрен анализ перечисленных ситуаций, термодинамические свойства в двухфазной области определяются по правилу аддитивности.

Расход газа через поршневой детандер определяется зависимостью [20]

$$G = n V_0 [(c_0 + a_0) \rho_n - (b_0 + a_0) \rho_k], \quad (3.37)$$

где n , V_0 , c_0 , a_0 , b_0 - соответственно число оборотов, описанный объем, отсечка наполнения, мертвое пространство, отсечка выпуска. Значения КПД поршневого детандера аналогично [59] рассчитываются по формуле

$$\eta_s = 0,872/T_n^{0,05} + 0,088 \quad (3.38)$$

При температурах расширяющегося гелия 5,5; 5,0; 4,5 К значения η_s , рассчитанные по (3.38), равны соответственно 0,8888; 0,8926; 0,8968, т.е. достаточно близки к экспериментальным КПД парожидкостного детандера, оцененным в пределах 0,8-0,9 [53].

Центробежный криогенный нагнетатель

Наиболее надежное проектирование центробежных компрессорных машин (ЦКМ) можно осуществить, если использовать характеристики отдельных ступеней, опираясь на метод подобия. При $Re_u \geq 5 \times 10^6$ процесс сжатия в геометрически подобных ступенях подчиняется зависимостям

$$\eta_p = f_1(F, \varphi, M_u, k); \quad (3.39)$$

$$\varepsilon = f_2(F, \varphi, M_u, k),$$

где F - тип проточной части; $\varphi = Q/(d_2^2 u_2)$; $M_u = u^2/a_n$;
 $Re_u = u_2 d_2/\nu$; Q - объемная производительность, $Q = G/\rho_n$;
 $\varepsilon = p_k/p_n$; u_2 - окружная скорость, $u_2 = \pi n d_2$; d_2 - диаметр колеса; k - показатель изоэнтропы; η_p - политропный КПД, $\eta_p = h_e/(h_k - h_n)$;
 индексы k, n - конечное и начальное состояние газа соответственно.

Отсутствие достаточно полных опубликованных экспериментальных данных о работе криогенных нагнетателей в СО КГУ вызвало необходимость использования газодинамических характеристик унифицированных ступеней в виде функций $\eta_p = f_1(F, \varphi, M_u)$;
 $\psi = f_2(F, \varphi, M_u)$, приведенных в работе [47]. Здесь $\psi = h_e/u_2$. Эти характеристики позволяют проектировать высокоэффективные проточные части ЦКМ с относительно малыми осевыми и радиальными размерами, а также выполнить моделирование криогенных нагнетателей при решении задач технологического проектирования.

Особенностями применения центробежных нагнетателей в СО КГУ является сжатие в них реального газа - насыщенного пара гелия при температурах 3,5 - 4,2 К, работа нагнетателей в сеть с гидравлическим сопротивлением 0,03 - 0,04 МПа, переменный расход гелия, определяемый тепловой нагрузкой рефрижератора. Эти условия и определили выбор системы исходных данных и

независимых переменных системы (3.39) при решении задачи моделирования криогенного нагнетателя. Анализ газодинамических характеристик конкретных ступеней показывает, что при $M_u = 0,6-0,915$ в области максимальных политропных КПД можно полагать $\eta_p \approx f_1(\varphi)$, $\psi \approx f_2(\varphi)$.

Если уравнение политропы с постоянным показателем m справедливо для реального газа, $p v^m = p/\rho^m = const$, эффективная работа

$$h_e = \int_n^k v dp = \sigma(p_k v_k - p_n v_n), \quad (3.40)$$

где $v_k = v(p_k, T_k)$; $v_n = v''(p_n)$; $\sigma = m / (m - 1)$; $m = \ln(p_k/p_n) / \ln(v_n/v_k)$.

Тогда для определения p_n и T_k достаточно решить систему двух уравнений:

$$\eta_p(\varphi)(h_k - h_n) - h_e = 0; \quad (3.41)$$

$$\psi(\varphi) u_2^2 - h_e = 0,$$

где $h_k = h(p_k, T_k)$; $h_n = h''(p_n)$, а функции $\eta_p(\varphi)$, $\psi(\varphi)$ находятся интерполяцией по заданным таблицам их значений для ступени конкретного типа в области $\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$.

Применение метода прямого поиска Хука и Дживса позволяет решить систему (3.41) за 30-50 итераций, а подпрограммы квадратичной интерполяции - определить η_p и ψ с высокой точностью.

Модель одноступенчатого нагнетателя в виде системы (3.38) позволила поставить и решить задачу о минимально достижимой температуре в рефрижераторе при заданных расходе сжимаемого гелия, давлении нагнетания и типе ступени:

$$\min T_n(d_2, M_u) \quad (3.42)$$

$$0,02 \leq d_2 \leq 0,05; 0,69 \leq M_u \leq 0,915;$$

$$\varphi_{min} \leq \varphi < \varphi_{max}; 10^4 \leq n \leq 10^5.$$

Результаты решения этой задачи приведены в табл.3.4.

Таблица 3.4

Характеристики одноступенчатых криогенных нагнетателей с унифицированными ступенями ЛПИ

G , кг/с	T_n , К	d_2 , мм	M_u	φ	ψ	η_p	$n/10^4, с^{-1}$
Ступень 1-0,25-0,60							
60	3,62	33,8	0,908	0,0550	0,621	0,718	5,93
120	3,62	40,3	0,912	0,0766	0,601	0,756	4,99
Ступень 2-0,25-0,60							
60	3,67	37,2	0,901	0,0428	0,568	0,751	5,39
120	3,69	43,8	0,906	0,0597	0,521	0,798	4,64
Ступень 2-0625-06039-ЛД19							
60	3,66	38,6	0,917	0,0397	0,527	0,849	5,28
120	3,66	54,2	0,915	0,0402	0,523	0,849	3,75

3.5. Моделирование криогенных эжекторов

Ступени с расширением сжатого гелия в эжекторе нашли применение в КГУ при получении холода на уровне 4,2-3 К и в циркуляционных системах криостатирования сверхпроводящих устройств. В них используют эжекторы со сверхзвуковым соплом высоконапорного газа, дозвуковым соплом низконапорного газа и цилиндрической камерой смешения.

Стандартные методики расчета эжекторов основываются на уравнениях одномерной газовой динамики и использовании коэффициентов, определяемых на основе опытных данных. В эжекторах применяют обычные сопла и диффузоры, расчет которых осуществляют по соответствующим методикам.

Рабочий процесс эжектора детально рассмотрен в [1]. В эжекторе со сверхзвуковым соплом эжектирующего газа струя, движущаяся со скоростью звука, продолжает расширяться, скорость ее становится сверхзвуковой, а площадь поперечного сечения большей площади выходного сечения сопла. Минимальная величина статического давления и максимальная скорость эжектируемого потока достига-

ются в сечении запираания, соответствующем максимальной площади сверхзвуковой струи. Смещение устойчивой высоконапорной струи с окружающим ее дозвуковым потоком на участке камеры смешения до сечения запираания почти не наблюдается.

Задачи расчета эжекторов были рассмотрены в монографиях [1, 52] и ряде статей, например [11,65]. Всех их объединяет применение соотношений идеального газа и, следовательно, газодинамических функций. Значительно меньше работ посвящено исследованию характеристик эжекторов, т.е. условиям их работы в нерасчетных режимах.

Помимо инженерных методов расчета эжекторов, основанных на решении алгебраических уравнений, разработаны приближенные методы расчета течения при смешении струй в каналах. В этих методах полагают, что двумерное смешение струй при отсутствии возвратного течения имеет одно доминирующее направление течения и наиболее существенными являются градиенты по нормали к этому направлению. Тогда уравнения, описывающие процесс смешения, достаточно хорошо аппроксимируются уравнениями пограничного слоя.

Решение этих уравнений получено интегральными или конечно-разностными методами. В интегральных методах, в результате интегрирования уравнений сохранения в поперечном направлении, они из уравнений в частных производных преобразуются в обыкновенные дифференциальные, что позволяет получить решение методом Рунге-Кутты. В конечноразностных методах осуществляется численное решение двумерных дифференциальных уравнений сохранения в частных производных.

Рассмотрим нелинейные задачи моделирования эжекторов, отличающиеся определяемыми величинами:

1. Определение массовых расходов эжектирующего G_1 , эжектируемого G_2 потоков, коэффициента эжекции $Z=G_2/G_1$ и температуры смеси T_3 при заданных параметрах эжектирующего потока (p_{10} , T_{10}), эжектируемого потока (p_{20} , T_{20}) и давлении сжатия p_3 .

2. Определение массовых расходов потоков G_1 , G_2 , коэффициента эжекции Z и паросодержания смеси при заданных параметрах эжектирующего потока (p_{10} , T_{10}), эжектируемого потока (p''_{20}) и давлении сжатия p_3 .

Здесь индексы 10 относятся к параметрам на входе в высоконапорное, 20 - низконапорное сопло.

Первая задача является типичной при определении характеристик газовых эжекторов, вторая соответствует применению эжектора в СО КГУ. В ней эжектирующий поток - прямой поток гелия после системы теплообменников, эжектируемый - насыщенный пар из испарителя и на выходе из эжектора - парожидкостная смесь.

Для решения этих задач, как обычно, воспользуемся уравнениями сохранения массы, энергии и импульса, позволяющими определить параметры потока на выходе из эжектора без рассмотрения собственно процессов смешения. В связи с протеканием процессов в криогенном эжекторе вблизи критической области гелия следует применить уравнение состояния реального газа.

Закон сохранения энергии, уравнения неразрывности и количества движения запишем в виде:

$$\begin{aligned} f_1 \rho_1 w_1 (h_1 + w_1^2/2) + f_2 \rho_2 w_2 (h_2 + w_2^2/2) + Q = \\ = f_3 \rho_3 w_3 (h_3 + w_3^2/2); \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$f_1 \rho_1 w_1 + f_2 \rho_2 w_2 = f_3 \rho_3 w_3; \quad (3.44)$$

$$f_1 \rho_1 w_1^2 + f_2 \rho_2 w_2^2 + p_1 f_1 + p_2 f_2 = f_3 \rho_3 w_3 + p_3 f_3 + p_{tr}. \quad (3.45)$$

Здесь Q - мощность источников тепла в смесительной камере, индексы $1,2$ - вход, 3 - выход из смесительной камеры.

Задача 1. Обозначив определяемые исходными данными комплексы величин в (3.43) и (3.44) k_1 , k_2 и подставив (3.44) в (3.43) и (3.45), получим:

$$k_1 + G_2 (h_2 + w_2^2/2) + Q - G_3 (h_3 + w_3^2/2) = 0; \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
 h_2 &= f(w_2); h_3 = h(p_3, T_3); \\
 k_2 + G_2 w_2 - G_3 w_3 + p_2 f_2 - p_{tr} &= 0; \\
 p_2 &= f(w_2); \rho_3 = \rho(p_3, T_3).
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

Здесь $k_1 = G_1(h_1 + w_1^2/2)$; $k_2 = G_1 w_1 + p_1 f_1 - p_3 f_3$; искомые переменные - w_2, T_3

Задача 2. Описывается также системой вида (3.46), (3.47), отличия заключаются в определении величин h_3 и ρ_3 ,

$$\begin{aligned}
 h_3 &= h'_3(1 - x_3) + h''_3 x_3; \\
 \rho_3 &= \rho'_3 \rho''_3 / [(1 - x_3)\rho''_3 + x \rho'_3]
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

и искомым переменных w_2, x_3 .

Решение нелинейной системы (3.46), (3.47) определяет неизвестные скорости эжектируемого потока и параметры потока смеси после камеры смешения.

Потери в камере смешения и диффузоре малоразмерных эжекторов следует рассчитывать по формуле

$$p_{tr} = [\psi(\text{Re}) l_3/d_3 + \zeta] \rho_3 w_3^2/2 f_3
 \tag{3.49}$$

Применение выражений для коэффициента гидравлического сопротивления камеры смешения из работ [1,65] приводит к заниженным значениям p_{tr} и, как следствие, невозможности минимизации невязки в уравнении (3.47) при численном решении систем. Приемлемые значения p_{tr} обеспечивает учет в формуле (3.49) трения, как на участке стабилизации, так и стабилизированного течения, где для газовых эжекторов можно полагать $\zeta \approx 1,4$ [61].

В эжекторах с $l_3 / d_3 \geq 8$ и диффузором с углом раскрытия 10° поле скоростей на входе в диффузор близко к полю скоростей в цилиндрической трубе и потери в диффузоре полагают зависящими только от чисел Re и λ [65],

$$\xi_d = \xi_{d0} (\text{Re}_{30} / \text{Re}_3)^{0,16} \quad (3.50)$$

где $\xi_{d0} = (k + 1)/k/\lambda_3^2 \ln(1/\nu_d)$; k - показатель изоэнтропы; $\lambda = w/a_{kr}$; ν_d - коэффициент восстановления диффузора.

Графическая зависимость $\nu_d(\lambda_3)$ из работы [65] аппроксимирована уравнением

$$\lambda_d = -a \exp(c \lambda_3 / \lg \text{Re}) + a + 1 \quad (3.51)$$

где $a = 0,0029822 / (\lg \text{Re} - 3,84616) + 0,00861539$;

$$c = -3,43034 / (\lg \text{Re} - 3,58159) + 16,4184.$$

Предельные режимы работы эжектора

В начальном участке камеры смешения, расположенном между входным сечением и сечением запираания, дозвуковой поток эжектируемого газа движется по каналу, ограниченному стенками камеры и сверхзвуковой расширяющейся струей. Скорость эжектируемого газа в сечении запираания не может превысить скорость звука, чем определяется максимальный расход эжектируемого газа [1]. Полные давления, температуры торможения и расходы эжектирующего и эжектируемого потоков в сечении запираания те же, что на входе в камеру смешения. Уравнения неразрывности каждого из потоков между входным сечением и сечением запираания:

$$f_1 \rho_1 w_1 = f'_1 \rho'_1 w'_1; f_2 \rho_2 w_2 = f'_2 \rho'_2 w'_2 \quad (3.52)$$

Поскольку $f_1 + f_2 = f'_1 + f'_2$, то

$$\alpha + 1 = \alpha f'_1/f_1 + f'_2/f_2, \quad (3.53)$$

где $\alpha = f_1/f_2$.

Уравнение количества движения, записанное для обоих потоков между входным сечением и сечением запираания,

$$G_1(w_1 - w'_1) + G_2(w_2 - w'_2) = p'_1 f'_1 + p_2 f'_2 - p_1 f_1 - p_2 f_2. \quad (3.54)$$

Из (3.52), (3.53) следует

$$\alpha [1 - B_1 / (\rho'_1 w'_1)] + 1 - B_2 / (\rho'_2 w'_2) = 0, \quad (3.55)$$

где $B_1 = \rho_1 w_1$; $B_2 = \rho_2 w_2$.

Группируя в (3.54) члены, относящиеся к одному потоку, и проводя преобразования, получим

$$\begin{aligned} & \alpha \{A_1 - B_1 [w'_1 + p'_1 / (\rho'_1 w'_1)]\} + \\ & + A_2 - B_2 [w'_2 + p'_2 / (\rho'_2 w'_2)] = 0, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $A_1 = \rho_1 w_1^2 + p_1$; $A_2 = \rho_2 w_2^2 + p_2$.

Уравнения (3.55), (3.56), дополненные условиями сохранения полной энтальпии и давления, позволяют найти параметры потоков в сечении запираания. Численное решение этих уравнений показало, что в малоразмерных гелиевых эжекторах при предельных скоростях w_3 скорость эжектируемого газа в сечении запираания существенно меньше скорости звука ($w'_2 \ll a'_2$), т.е. максимальный расход эжектируемого газа ограничивается режимом течения на выходе из камеры смешения.

Запираание эжектора должно произойти, когда расширившаяся струя эжектирующего потока заполнит все поперечное сечение камеры смешения, $f'_1 = f_3$. В этом случае эжектируемый поток не поступает, $w_2 = 0$, а из (3.54) следует

$$p_2 = \alpha \{ \rho_1 w_1^2 + p_1 - \rho_1 w_1 [w'_1 + p'_1 / (\rho'_1 w'_1)] \} \quad (3.57)$$

либо

$$\pi = p_1/p_2 = \{ \alpha [\rho_1 w_1^2 / p_1 + 1 - \rho_1 w_1 / p_1 (w'_1 + p'_1 / (\rho'_1 w'_1))] \}^{-1}.$$

Определив из (3.52) произведение $\rho'_1 w'_1$, а p'_1 - из условия сохранения полного давления, можно найти по соотношениям вида (3.57) минимальное давление p_2 или максимальное соотношение давлений π эжектора с заданными геометрическими размерами и параметрами эжектирующего потока.

Параметры потока смеси на выходе из цилиндрической камеры смешения находят решением системы (3.46), (3.47). Для определения скорости потока смеси преобразуем уравнение количества движения (3.45),

$$\begin{aligned} & [w_1 + p_1 / (\rho_1 w_1)] + Z[w_2 + p_2 / (\rho_2 w_2)] = \\ & = (Z + 1) [w_3 + p_3 / (\rho_3 w_3)] + p_{tr}/G. \end{aligned} \quad (3.58)$$

После несложных преобразований выражения (3.49) получим

$$p_{tr}/G_1 = (Z + 1) \chi w_3, \quad (3.59)$$

где $\chi = [\psi(\text{Re}) l_3/d_3 + \zeta]/2$.

Область реальных режимов работы эжектора ограничивается звуковой скоростью течения на выходе из смесительной камеры. Подставляя последнюю формулу в уравнение (3.58) и полагая $w_3=a_3$, получим

$$\begin{aligned} & (\max Z + 1)[a_3 + p_3 / (\rho_3 a_3) + \chi a_3] = \\ & = [w_1 + p_1 / (\rho_1 w_1)] + \max Z[w_2 + p_2 / (\rho_2 w_2)], \end{aligned} \quad (3.60)$$

Поскольку $w_2 = Z G_1/(\rho_2 w_2)$, из (3.60) получим квадратное уравнение

$$k_1(\max Z)^2 - k_2 \max Z + (k_3 - k_2) = 0, \quad (3.61)$$

где

$$k_1(p_2, T_2) = G_1 / (\rho_2 f_2);$$

$$k_2(p_3, T_3) = a_3 + p_3 / (\rho_3 a_3) + \chi a_3;$$

$$k_3(p_2) = w_1 + p_1/(\rho_1 w_1) + p_2 f_2 / G_1.$$

Решение уравнения (3.61)

$$\max Z_{1,2} = [k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1(k_3 - k_2)}] / (2k_1)$$

либо

$$\max w_{2(1,2)} = [k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1(k_3 - k_2)}] / 2 . \quad (3.62)$$

Расчеты показывают, что при относительно малых коэффициентах эжекции первый корень уравнения (3.62) положителен и $\max w_{2(1)} > a_2$, а второй отрицателен. С приближением к предельным режимам второй корень уравнения (3.61) становится положительным и $\max w_{2(2)} < a_2$. Поэтому максимальную скорость эжектируемого потока определим как

$$\max w_2 = \min \{a_2, w_{2(1)}, w_{2(2)}^+\}.$$

Известно, что кризисные явления могут наступать при движении паров любых веществ [10]. Критическая скорость потока влажного пара определяется как

$$w_{kr} = v dp/dT (T / c_v)^{1/2}, \quad (3.63)$$

где при известных свойствах на линиях кипения и конденсации

$$\begin{aligned} c_v &= c'_v + (v - v') T d^2p/dT^2; \\ dp/dT &= (s'' - s') / (v'' - v'); \\ d^2p/dT^2 &= (c''_v - c'_v) / (v'' - v') / T. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Тогда, заменяя в (3.61) a на w_{kr} по выражению (3.63), полученное решение можно применить для расчета предельных режимов двухфазных эжекторов.

Определение параметров потоков на входе в камеру смешения

Для моделирования эжекторов в приведенной постановке задачи необходимо определить параметры высоконапорного потока на выходе из сверхзвукового сопла G_1, p_1, T_1 . Расход газа при течении в реальном сопле определяется на основе модели изоэнтروпийного течения с одинаковой величиной перепада давления $\varepsilon = p_k/p_n$, $G = c_d G_s$. Параметры изоэнтропийного течения реального газа можно определить решением системы двух уравнений:

$$h + w^2/2 = const; \quad s = const.$$

При известной функциональной зависимости $T(T_n, \varepsilon)$ на изоэнтропе эта система сводится к одному уравнению энергии относительно p_k .

Коэффициенты расхода сверхзвукового сопла при малых числах Рейнольдса можно определить по зависимостям работы [32], полученным из решений уравнений пограничного слоя. Уравнение, справедливое при $0 \leq r_c/r_t \leq 20$, $50 \leq Re \leq 10^5$, имеет вид

$$c_d = \left(\frac{r_c + 0,05r_t}{r_c + 0,75r_t} \right)^{0,019} \left[1 - \left(\frac{r_c + 0,1r_t}{r_t} \right)^{0,21} Re^{-0,5} f(k) \right] \quad (3.65)$$

где $f(k) = 0,97 + 0,86 k$; $k = c_p/c_v$; r_c - радиус критического сечения сопла; r_t - радиус кривизны профиля у критического сечения сопла.

Параметры высоконапорного потока в газовом эжекторе (задача 1) определяются последовательным решением уравнения сохранения энергии методом Вегстейна для участков сопла „вход - критическое сечение“ и „критическое сечение – выход“ с использованием зависимости (3.65) для коэффициента расхода и учетом потери энергии потока на преодоление трения. Параметры низконапорного потока на выходе из сужающегося сопла также можно определить решением уравнения сохранения энергии относительно давления p_2 .

Исследования истечения криогенных жидкостей из сопел при начальных давлениях и температурах в однофазной области над левой пограничной кривой, $p_n > p_K$, $T_n > T_K$ либо $T_n < T_K$ [58] показали, что в области начальных давлений, при которых поток, расширившись до кривой насыщения, имеет скорость, равную либо меньшую скорости звука со стороны однофазной области, параметры в критическом сечении сопла определяются точкой пересечения пограничной кривой и изоэнтропы. Тогда их можно найти численным решением уравнения $s'(p') - s(p_n, T_n) = 0$.

В условиях значительных продольных градиентов давлений изменение состояния ускоряющейся жидкости, движущейся по адиабатному каналу, отклоняется от термодинамически равновесного изоэнтропийного процесса, что приводит к уменьшению количества

образующегося пара и сохранению конденсированной составляющей потока в перегретом состоянии [10].

Для решения задачи о расходе потока и состоянии среды на выходе из жидкостного высоконапорного сопла необходимо привлечение экспериментальных результатов. Достаточно полные для моделирования экспериментальные данные о жидкостных криогенных эжекторах получены в НПО "Гелиймаш". Анализ этих данных позволил подтвердить вывод работы [10] о том, что при течении насыщенной жидкости в каналах небольшой протяженности гидравлическая модель существенно лучше описывает измеренные расходы, чем модель термодинамически равновесного изоэнтروпийного процесса.

В этом случае выражение для определения расхода высоконапорного потока получим в виде

$$G = c_0 G_1, \quad (3.66)$$

где G_1 - расход жидкости, $G_1 = f_k \sqrt{2(p_{10} - p_3)\rho'_k}$; ρ'_k - плотность кипящей жидкости в точке пересечения пограничной кривой и изоэнтропы; индексы: 10 - вход в высоконапорное сопло, 3 - выход из камеры смешения, k - критическое сечение.

По опытным данным, полученным при течении гелия в сужающихся и сверхзвуковых соплах можно полагать $c_0 \approx const \approx 0,84$.

Соотношения для энтропии и энтальпии влажного пара, следующие из уравнения Клапейрона-Клаузиуса, имеют вид:

$$s = s' + (v - v') dp/dT; \quad (3.67)$$

$$h = h' + (v - v')T dp/dT. \quad (3.68)$$

Так как при изоэнтропийном течении $s_1 = s_{10}$, из (3.67) найдем удельный объем парожидкостной смеси в выходном сечении высоконапорного сопла,

$$v_1 = v' + (s_{10} - s') dp/dT^{-1}. \quad (3.69)$$

Поскольку расход высоконапорного потока уже определен по уравнению (3.66), из уравнения неразрывности можно найти скорость на выходе из высоконапорного сопла,

$$w_1 = G_1 v_1 c_w / (f_1 c_d). \quad (3.70)$$

Здесь c_d , c_w - коэффициенты расхода и скорости.

Из уравнений энергии и (3.68) получим $h_1 = h_{10} - w_1^2/2$,

$$h_1 - h'(T_1) - [v_1(T_1) - v'(T_1)] T_1 dp/dT = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду $T = f(T)$,

$$T_1 = T_1 + [h_1 - h' + (v_1 - v') T_1 dp/dT] k. \quad (3.71)$$

Решение уравнения (3.71) определяет состояние среды в двухфазной области на выходе из жидкостного высоконапорного сопла. При значении коэффициента $k = 0,0001$ метод Вегстейна сходится к решению за 5 - 7 итераций.

При подводе к низконапорному соплу перегретого или насыщенного пара скачок конденсации возникает только в сверхзвуковой части канала. Процесс на участке от входного сечения сопла до критического близок к изоэнтропийному, отвечающему расширению однородного неконденсированного пара [10]. В этом случае расход через сопло и распределение параметров потока в сходящемся участке можно рассчитать по соотношениям для адиабатного течения газообразной среды, приведенным выше.

Таким образом, обе задачи моделирования эжекторов сводятся к нахождению параметров потока на выходе из высоконапорного сопла двукратным решением одного нелинейного уравнения с последующим решением системы нелинейных уравнений для определения параметров потока смеси после камеры смешения. Параметры потока после низконапорного сопла определяются решением одного уравнения на каждой итерации решения этой системы.

Поскольку режимы работы эжектора ограничиваются предельными условиями течения в сечении запирания и на выходе из смесительной

камеры, итерационную процедуру решения системы целесообразно заменить минимизацией функционала,

$$\min F(x) = \sum_i^2 g_i^2(x) + \sum_j^2 \mu_j h_j^2(x), \quad (3.72)$$

где $\mu = 0$ при выполненных ограничениях, $\mu_j = 1$ при невыполненных.

Применение метода прямого поиска Хука и Дживса позволяет решить задачу (3.72) за 30 - 50 итераций.

Приведем результаты расчета характеристик микроэжектора при работе на гелии, для которого в статье [66] имеются достаточно подробные данные.

Геометрические размеры микроэжектора: диаметры критического и выходного сечения высоконапорного сопла $d_k = 0,64$ мм, $d_l = 1,22$ мм; диаметр диффузора на выходе $d_4 = 12$ мм; диаметр и длина камеры смешения $d_3 = 5,875$ мм, $l_3 = 76,4$ мм; комплекс $a = 0,456$.

На рис.3.8 сопоставлены экспериментальные зависимости $\varepsilon(Z)$, $\eta(Z)$ работы [66] с расчетными по методике [11] и результатами решения задачи 1 по описанному алгоритму. Здесь $\varepsilon = p_4/p_{20}$;

$$\eta = Z(\varepsilon^n_{20} - 1)/[1 - (\varepsilon/\pi)^n_{10}]/\nu;$$

$\pi = p_{10}/p_{20}$; $n = (k - 1)/k$; $\nu = h_{10}/h_{20}$; индексы: 10 - вход в высоконапорное сопло, 20 - в низконапорное, 4 - выход из диффузора.

При $\pi = const$, $\varepsilon = const$ уравнению (3.46) удовлетворяют несколько значений скорости эжектируемого потока w_2 , одна из которых практически совпадает с экспериментальной величиной (рис.3.8а). Предельные режимы эжектора ограничиваются максимальной скоростью эжектируемого потока, определенной по уравнению (3.62); при этом $w_3 \ll a_3$ и $w_2 < \max w_2$, найденной из условия запираания камеры смешения.

Характеристики $\varepsilon(Z)$ двухфазных эжекторов, исследованных в НПО „Гелиймаш“ (табл.3.5.), приведены на рис. 3.9, 3.10. Здесь также первое уравнение системы может иметь несколько корней, один из

которых приближается к экспериментальному значению и необходимо учитывать $\zeta > 0$ в выражении (3.49). Можно полагать $\zeta \approx 0,8$, если ψ (Re) определять по формуле Блазиуса, а число Рейнольдса как для гомогенного двухфазного потока с паросодержанием x_3 .

Расчетные значения давлений в камере смешения, на выходе из камеры смешения, расхода высоконапорного потока и коэффициента эжекции при $p_{10} = 1,218 - 1,507$ МПа, $T_{10} = 5,0 - 5,72$ К, $p_{20} = 0,02 - 0,078$ МПа, $T_{20} = 2,89 - 3,95$ К, полученные на описанной модели двухфазного эжектора, достаточно близки к экспериментальным в большинстве режимов (табл.3.6).

Таблица 3.6

Расчетные и опытные характеристики криогенных микроэжекторов

N по 3.5	p_2 , МПа	\hat{p}_2 , МПа	p_3 , МПа	\hat{p}_3 , МПа	G_1 , г/с	\hat{G}_1 , г/с	Z	\hat{Z}
1	0,063	0,063	0,134	0,133	22,1	15,4	0,310	0,445
2	0,020	0,022	0,126	0,122	14,9	16,6	0,038	0,034
2	0,030	0,031	0,125	0,121	14,5	16,6	0,096	0,084
2	0,041	0,042	0,125	0,128	14,8	16,6	0,191	0,170
2	0,071	0,044	0,125	0,127	-	16,6	-	0,312
3	0,022	0,031	0,134	0,134	14,9	16,1	0,040	0,037
3	0,029	0,031	0,133	0,134	15,1	16,1	0,075	0,070
4	0,051	0,070	0,125	0,133	-	14,9	0,310	0,304
4	0,062	0,078	0,130	0,133	-	14,8	0,520	0,510
4	0,042	0,072	0,129	0,139	-	14,9	0,220	0,216
5	0,022	0,023	0,128	0,134	15,7	15,4	0,057	0,058
5	0,041	0,041	0,128	0,134	15,6	15,4	0,160	0,161
5	0,061	0,042	0,128	0,134	16,0	15,6	0,255	0,262
5	0,078	0,040	0,128	0,134	15,6	15,6	0,337	0,338

Геометрические характеристики микроэжекторов
НПО "Гелиймаш"

N	d_k , мм	d_l , мм	d_3 , мм	l_3 , мм
1	1,17	3,22	5,6	80
2	1,21	3,20	5,6	84
3	1,21	3,18	4,0	48
4	1,16	1,16	5,6	84
5	1,17	1,17	4,0	48

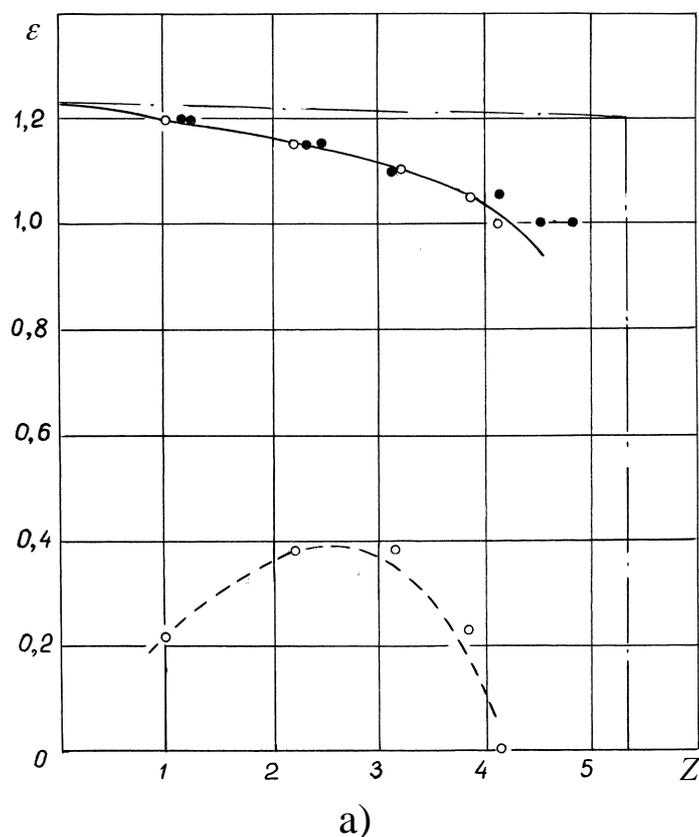
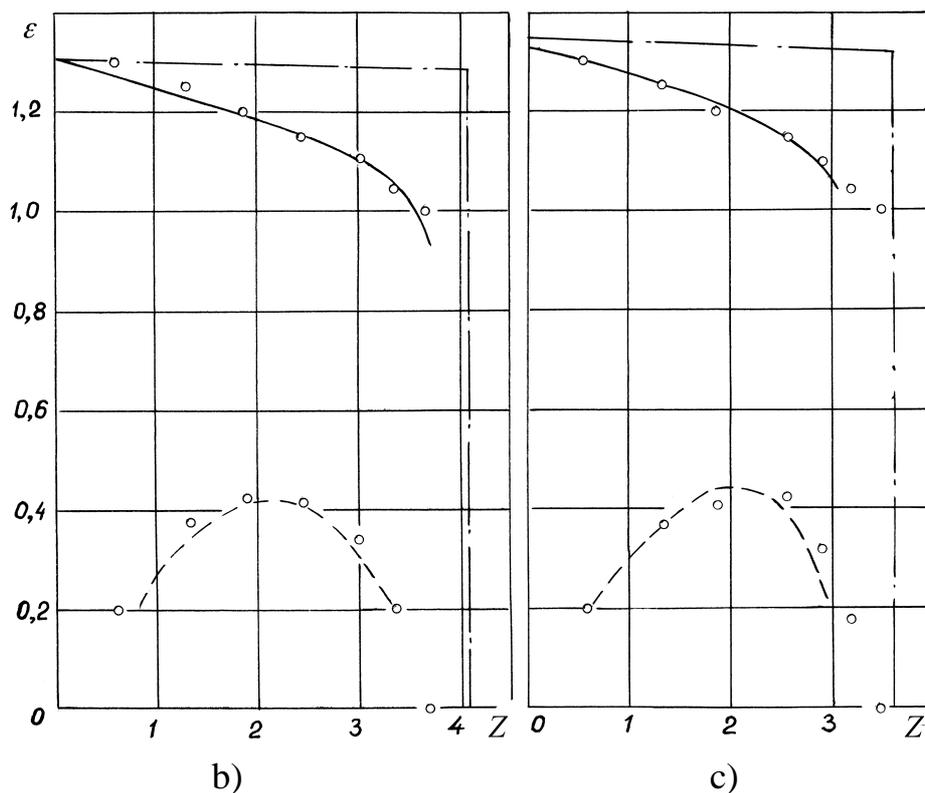


Рис.3.8. Дроссельные характеристики микроэжектора:
а) $\pi = 14,9$; б) $\pi = 19,4$; в) $\pi = 21,9$; _____ $\varepsilon(Z)$; - - - $\eta(Z)$, эксперимент [66];
— · — расчет по [11]; о, • - результаты моделирования



Продолжение рис.3.8

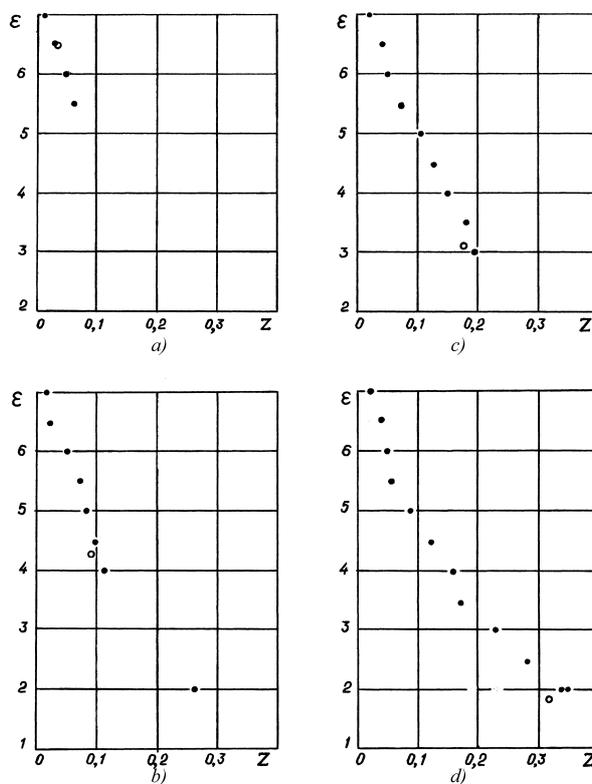


Рис.3.9. Характеристики двухфазного микроэжектора 2:

a) $\pi = 67,5$; b) $\pi = 44,2$; c) $\pi = 32,6$; d) $\pi = 19,0$;

● - результаты моделирования; ○ - экспериментальный режим

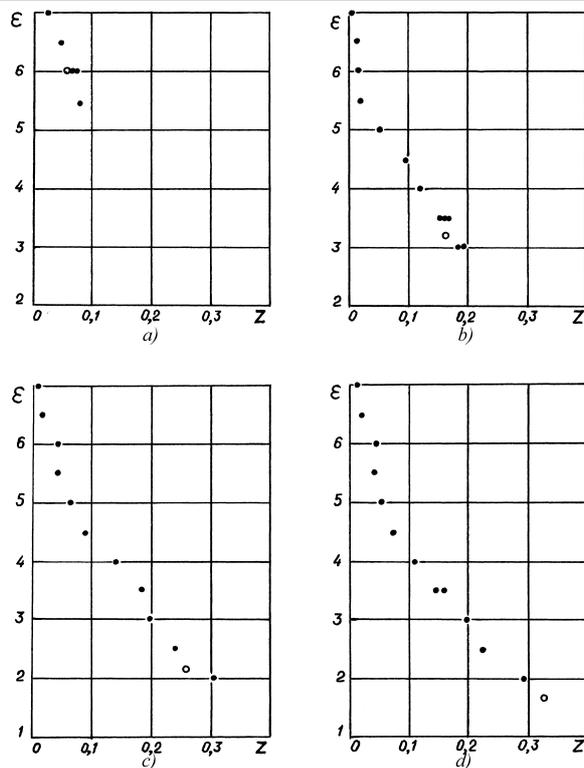


Рис.3.10. Характеристики двухфазного микроэжектора 5:

а) $\pi = 60,9$; б) $\pi = 32,5$; в) $\pi = 21,8$; г) $\pi = 17,0$;

● - результаты моделирования; ○ - экспериментальный режим